

□

$$(1) \quad y' = 2x$$

$s \neq 0$ のとき、点 P における法線の方程式は、

$$y - s = -\frac{1}{2s}(x - s)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2s}x + \frac{1}{2} + s^2 //$$

(2) (1) と同様に点 Q における法線の方程式は

$$y = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2} + t^2$$

2 直線 l_P, l_Q が直交するので

$$\left(-\frac{1}{2s}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2t}\right) = -1$$

$$t = -\frac{1}{4s}$$

$$\therefore y = 2sx + \frac{1}{2} + \frac{1}{16s^2} //$$

$$(3) \quad 2sx + \frac{1}{2} + \frac{1}{16s^2} = -\frac{1}{2s}x + \frac{1}{2} + s^2$$

$$2\left(s + \frac{1}{4s}\right)x = s^2 - \frac{1}{16s^2}$$

$$= \left(s + \frac{1}{4s}\right)\left(s - \frac{1}{4s}\right)$$

$$s + \frac{1}{4s} \neq 0 \text{ のとき}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{4s}\right)$$

$$\therefore x_0 = \frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{4s}\right) //$$

$$y = 2sx + \frac{1}{2} + \frac{1}{16s^2} \text{ のとき}$$

$$y = 2s \cdot \frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{4s}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{16s^2}$$

$$= s^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16s^2}$$

$$= s^2 + \frac{1}{16s^2} + \frac{1}{4}$$

$$\therefore y_0 = s^2 + \frac{1}{16s^2} + \frac{1}{4} //$$

(4) (3) のとき

$$y_0 = s^2 + \frac{1}{16s^2} + \frac{1}{4}$$

$s^2 > 0$ のとき相加平均・相乗平均の関係から

$$s^2 + \frac{1}{16s^2} \geq 2\sqrt{s^2 \cdot \frac{1}{16s^2}} \\ = \frac{1}{2}$$

等号成立は、

$$s^2 = \frac{1}{16s^2}$$

つまり

$$16s^4 = 1$$

$$s^4 = \frac{1}{16}$$

$s^2 \geq 0$ のとき

$$s^2 = \frac{1}{4}$$

$s < 0$ のとき

$$s = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore s = -\frac{1}{2} \text{ のとき } y_0 \text{ の最小値は } \frac{1}{2} //$$

2

(1) 数列 $\{a_n\}$ は、初項 1, 公比 7 の等比数列であるから、

$$a_n = 7^{n-1}$$

これが 89 桁の整数となるとき、

$$10^{88} \leq 7^{n-1} < 10^{89}$$

$$88 \leq (n-1) \log_{10} 7 < 89$$

$$\frac{88}{\log_{10} 7} \leq n-1 < \frac{89}{\log_{10} 7}$$

 $\log_{10} 7 = 0.8451$ を用いて計算すると、

$$104.1 \dots \leq n-1 < 105.3 \dots$$

$$105.1 \dots \leq n < 106.3 \dots$$

よ)、

$$\underline{n=106}$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ の 1 の位の数は、

$$1, 7, 9, 3, 1, 7, \dots$$

と、1, 7, 9, 3 が繰り返して現れる。

$$106 \div 4 = 26 \dots 2$$

よ)、 a_{106} の 1 の位の数は、7(3) a_{106} は 89 桁の整数であるから、最高位の数字を a ($a=1, 2, \dots, 9$) とすると、

$$a \cdot 10^{88} \leq 7^{105} < (a+1) \cdot 10^{88}$$

$$88 + \log_{10} a \leq 105 \log_{10} 7 < 88 + \log_{10} (a+1)$$

 $\log_{10} 7 = 0.8451$ を用いると、

$$\log_{10} a \leq 0.7355 < \log_{10} (a+1)$$

こゝで、

$$\log_{10} 5 = \log_{10} 10 - \log_{10} 2$$

$$= 0.6990$$

$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3$$

$$= 0.7781$$

よ) $a=5$ すなわち、 a_{106} の最高位の数字は 5。

3

条件 $AP = BP = rOP$ の辺々を2乗して,

$$AP^2 = BP^2 = r^2 OP^2$$

ゆえ,

$$\begin{aligned} (a-1)^2 + (b-1)^2 + c^2 &= (a-1)^2 + (b+1)^2 + c^2 \\ &= r^2 (a^2 + b^2 + c^2) \quad \dots (*) \end{aligned}$$

(1) $r=1$ のとき, (*) から,

$$\begin{cases} (a-1)^2 + (b-1)^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b+1)^2 + c^2 & \dots (1) \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 & \dots (2) \end{cases}$$

①から, $b=0$ であり, これを②に代入すると,

 $a=1$ が得られる。このとき,

$$\begin{aligned} OP &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{c^2 + 1} \end{aligned}$$

は, $c=0$ で最小になる。

すなわち, 求める値は,

$$(a, b, c) = (1, 0, 0),$$

(2) $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき, (*) から

$$\begin{cases} (a-1)^2 + (b-1)^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b+1)^2 + c^2 & \dots (1) \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + c^2 = \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2) & \dots (2) \end{cases}$$

(1)と同様に, ①から $b=0$ であり, これを②に代入すると,

$$(a-1)^2 + (-1)^2 + c^2 = \frac{3}{4} (a^2 + 0^2 + c^2)$$

 $\therefore c^2 = -a^2 + 8a - 8$ が得られる。

ここで, $c^2 \geq 0$ であるから

$$-a^2 + 8a - 8 \geq 0$$

$$a^2 - 8a + 8 \leq 0$$

$$\therefore 4 - 2\sqrt{2} \leq a \leq 4 + 2\sqrt{2}$$

(3) (2) から,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = (a, b, c) \cdot (a-1, b-1, c)$$

$$= a(a-1) + c^2 \quad (\because b=0)$$

$$= 7a - 8 \quad (\because c^2 = -a^2 + 8a - 8)$$

ゆえ $a = 4 + 2\sqrt{2}$ で最大,

 $a = 4 - 2\sqrt{2}$ で最小 となる。

すなわち,

$$\underline{\text{最大値 } 20 + 14\sqrt{2}, \text{ 最小値 } 20 - 14\sqrt{2}}$$

4

A が 2 枚、B が 3 枚の札を同時に取り出したとき、総数は ${}^9C_2 \times {}^7C_3$ (通り)。

また、A が 2 枚取り、その後 B が 3 枚の札を取り出したとき、総数は ${}^9C_2 \times {}^7C_3$ (通り)。

いずれの場合も、取り出し方の総数は ${}^9C_2 \times {}^7C_3$ (通り) である。

(1) A が同じ数字の札を取り出すとき、

取り出す数字の選び方は 3C_1 通り。

それぞれに対して、札の選び方が 3C_2 通りずつある。

したがって、求める確率は、

$$\frac{{}^3C_1 \times {}^3C_2}{{}^9C_2 \times {}^7C_3} = \frac{1}{4}$$

(2) A が取り出す札の数字と B が取り出す札の数字がどちらも異なる場合を考える。

i) A が同じ数字の札を取り出すとき、

B は A が取り出した数字以外の 6 枚の札から 3 枚を取り出せばよいので、このときの確率は、

ii) を利用すると、

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{{}^6C_3}{{}^7C_3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{7}$$

ii) A が異なる数字の札を取り出すとき、

B は A が取り出した数字以外の 3 枚の札から 3 枚を取り出せばよいので、このときの確率は、

ii) を利用すると、

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{{}^3C_3}{{}^7C_3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{35} = \frac{3}{140}$$

i) ii) より、A が取り出す札の数字と B が取り出す札の数字がどちらも異なる場合の確率は、

$$\frac{1}{7} + \frac{3}{140} = \frac{23}{140}$$

よって求める確率は

$$1 - \frac{23}{140} = \frac{117}{140}$$