$\boxed{1}$

(1)

$$a_1 = S_1 = \frac{7}{6}(a_1 - 1) \quad \therefore a_1 = 7$$

であり，

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$
$$= \frac{7}{6}(a_{n+1} - 1) - \frac{7}{6}(a_n - 1)$$

より，

$$a_{n+1} = 7a_n$$

数列$\{a_n\}$は，初項7，公比7の等比数列であるから，

$$\underline{a_n = 7^n}$$

(2) a_nが89桁の整数となるとき，

$$10^{88} \leqq 7^n < 10^{89}$$

$$88 \leqq n \log_{10} 7 < 89$$

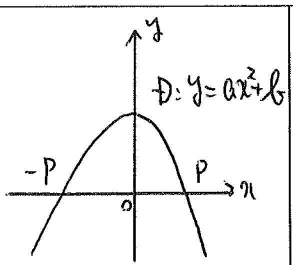
$$\frac{88}{\log_{10} 7} \leqq n < \frac{89}{\log_{10} 7}$$

$$\therefore 104.1\cdots \leqq n < 105.3\cdots$$

よって，$\underline{n = 105}$

(3)(4) $a_{105} = 7^{105}$ の1の位と最高位の数字を求める問題で，「数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B」の $\boxed{2}$ (2),(3)と同じ。

$\boxed{2}$



(1) 与条件から,

$$S=\int_{-p}^{p}(ax^2+b)\,dx$$

$$=\int_{-p}^{p}a(x-p)(x+p)\,dx$$

$$=-\frac{a}{6}\{p-(-p)\}^3=\underline{-\frac{4}{3}ap^3}$$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $g(x)=ax^2+b$ とおくと,

2曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ が $x=t\ (>0)$ で接するから,

$$\begin{cases} f(t)=g(t) & \cdots ① \\ f'(t)=g'(t) & \cdots ② \end{cases}$$

②から

$$-\frac{2t}{(t^2+1)^2}=2at$$

で, $t\neq 0$ より

$$\underline{a=-\frac{1}{(t^2+1)^2}}$$

①から

$$b=\frac{1}{t^2+1}-at^2$$

$$=\frac{1}{t^2+1}+\frac{t^2}{(t^2+1)^2}=\underline{\frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}}$$

(3) $y=ax^2+b$ は $(p,0)$ を通るから, $p>0$ より

$$p=\sqrt{-\frac{b}{a}}=\sqrt{-\frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}\times\left\{-(t^2+1)^2\right\}}\quad(\because(2))$$

$$=\sqrt{2t^2+1}$$

ゆえに, (1)から, $\underline{S=\dfrac{4(2t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3(t^2+1)^2}}$

(4) $t^2=X$ とおくと, $X>0$ であり,

$$S=\frac{4}{3}\cdot\frac{(2X+1)^{\frac{3}{2}}}{(X+1)^2}$$

これを, $h(X)$ とおくと,

$$h'(X)=\frac{4}{3}\cdot\frac{3(2X+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(X+1)^2-(2X+1)^{\frac{3}{2}}\cdot 2(X+1)}{(X+1)^4}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{3(X+1)-2(2X+1)}{(X+1)^3}\sqrt{2X+1}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{-X+1}{(X+1)^3}\sqrt{2X+1}$$

$X>0$ において, $h'(X)$ と $-X+1$ の符号は一致するから, 増減表は下のとおり

X	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(X)$		$+$	0	$-$
$h(X)$		$\nearrow$		$\searrow$

よって, $X=1$ で S は最大値をとる。

このとき, $t>0$ から $t=1$ であり, $(a,b)=\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)$

すなわち, 求める D の方程式は, $\underline{y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{4}}$

別解(4)

$S=\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{(2t^2+1)^3}{(t^2+1)^4}}$ より $u=t^2+1$ とおくと,

$$S=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{(2u-1)^3}{u^4}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{8u^3-12u^2+6u-1}{u^4}}$$

さらに, $v=\dfrac{1}{u}$ とおくと, $0<v<1$ であり,

$$S=\frac{4}{3}\sqrt{8v-12v^2+6v^3-v^4}$$

と表されるから, この根号の中の最大値を求めてもよい。

[3]

(1) 数学Ⅰ, 数学Ⅱ, 数学A, 数学B 型の

(1)と同じ。

(2) (1)より、Aが異なる数の札を取り出す

確率は $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

i) AとBが全く同じ数の札を取り出すとき、

Bが取り出す数字の選び方は、Aと同じなので、1通り、

Bが取り出す札の選び方が ${}_2C_1\times{}_2C_1$ 通り。

また、Cが取り出す数字の選び方は、

(1, 2, 3) の 1通り

Cが取り出す札の選び方は ${}_1C_1\times{}_1C_1\times{}_3C_1$ 通り。

したがってこのときの確率は

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_7C_2}\times\frac{{}_1C_1\cdot{}_1C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{70}$$

ii) AとBが1枚が同じ数, 1枚が異なる数の札を取り出すとき、

Bが取り出す数字の選び方は、同じ数が ${}_2C_1$ 通り, 異なる数が ${}_1C_1$ 通り。

Bが取り出す札の選び方は、同じ数の札が ${}_2C_1$ 通り。異なる数の札が ${}_3C_1$ 通り、

またCが取り出す数字の選び方は、

(1, 2, 3)の 1通り。

Cが取り出す札の選び方は、${}_1C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_1$ 通り、

したがって、このときの確率は、

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1\times{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_7C_2}\times\frac{{}_1C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_3}=\frac{12}{70}$$

i) ii) より 求める確率は

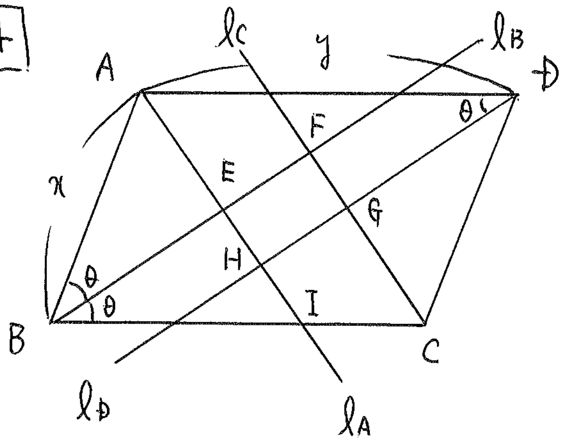
$$\frac{3}{70}+\frac{12}{70}=\frac{3}{14}$$

(3) 数学Ⅰ, 数学Ⅱ, 数学A, 数学B 型の

(2)において、B を C に入れかえれば

同じ問題。

4



(1) $\angle BAD = 2\alpha \ (0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ とおくと，

$2\theta+2\alpha=\pi \quad \therefore \theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$

$\angle FEH = \angle AEB$

$= \pi-(\theta+\alpha) = \underline{\frac{\pi}{2}}$ //

(2) $\triangle ABE$ において，三角比の定義から

$AE = \underline{x\sin\theta}$ //

また，(1)と同様に，$\angle AHD = \frac{\pi}{2}$ であるから，
$\triangle AHD$ において，三角比の定義から，

$AH = \underline{y\sin\theta}$ //

(3) l_A と BC との交点を I とすると，
点 H が平行四辺形 ABCD の外部にある条件は，

$AI < AH$

また，$\triangle ABE \equiv \triangle IBE$ より $AI = 2AE$ から
(2)を用いて，

$2x\sin\theta < y\sin\theta$

$\sin\theta>0$ より 求める条件は，$\underline{2x<y}$ //

(4) (3)と同様に考えて，
点 E, G が平行四辺形 ABCD の外部にあるような条件は，

$2y<x \quad \cdots①$

であるが，$0<x<y$ から ①を満たす x, y は存在しない。
ゆえに，以下の場合が考えられる。

i) $2x \geqq y$ のとき，

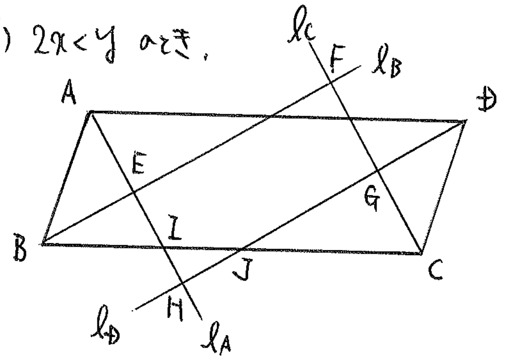
(2)と同様にして，$DG = x\cos\theta$，$DH = y\cos\theta$ より

$S = EH\cdot HG$

$= (AH-AE)(DH-DG)$

$= (x-y)^2\sin\theta\cos\theta$

ii) $2x<y$ のとき，



l_D と BC との交点を J とすると 対称性から，

$S = EH\cdot HG - 2\triangle IHJ$

$= (x-y)^2\sin\theta\cos\theta - 2\cdot\frac{1}{2}(AH-2AE)(DH-2DG)$

$= (x-y)^2\sin\theta\cos\theta - (y-2x)\sin\theta\cdot(y-2x)\cos\theta$

$= x(2y-3x)\sin\theta\cos\theta$

$$\therefore S = \begin{cases} (x-y)^2\sin\theta\cos\theta & (2x \geqq y \text{ のとき}) \\ x(2y-3x)\sin\theta\cos\theta & (2x<y \text{ のとき}) \end{cases}$$ //