$\boxed{1}$

(1)　$x^{3m}-1$ を x^3-1 で割ったときの商を $P(x)$，余りを ax^2+bx+c とおくと，

$$x^{3m}-1=(x^3-1)P(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。

$x^3-1=0$ の解のうち虚数解の1つを ω とすると，$\omega^3=1$ が成り立ち，

$$\omega^3-1=0$$

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

$$\omega^2+\omega+1=0 \qquad (\because \omega \fallingdotseq 1)$$

また，$(\omega^2)^3-1=(\omega^3)^2-1=0$ より，ω^2 は$x^3-1=0$ の解であるといえる。また，$\omega^2 \fallingdotseq \omega$ であるため，$x^3-1=0$ の解は $1,\omega,\omega^2$ である。

①に $x=1$ を代入すると，

$$0=a+b+c \quad \cdots\cdots ②$$

①に $x=\omega$ を代入すると，

$$\omega^{3n}-1=a\omega^2+b\omega+c$$

$$1^n-1=a(-\omega-1)+b\omega+c \qquad (\because \omega^3=1,\ \omega^2=-\omega-1)$$

$$0=(-a+b)\omega-a+c \quad \cdots\cdots ③$$

①に $x=\omega^2$ を代入すると，

$$\omega^{6n}-1=a\omega^4+b\omega^2+c$$

$$1-1=a\omega+b(-\omega-1)+c$$

$$0=(a-b)\omega-b+c \quad \cdots\cdots ④$$

②，③，④より，

$$a=b=c=0$$

したがって，$x^{3m}-1$ を x^3-1 で割ったときの余りは 0 となり，題意は示された。

別解

$x^{3m}-1$ を因数分解すると，

$$x^{3m}-1=(x^3)^m-1=(x^3-1)\{(x^3)^{m-1}+(x^3)^{m-2}+\cdots\cdots\cdots+x^3+1\}$$

であるから，$x^{3m}-1$ を x^3-1 で割り切れることが示された。

(2)　x^n-1 を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $dx+e$ とおく。ただし，d,e は実数の定数とする。このとき，

$$x^n-1=(x^2+x+1)Q(x)+dx+e$$

が成り立つ。

(1) より，ω は $x^2+x+1=0$ の解であるため，$x=\omega$ を代入すると，

$$\omega^n-1=d\omega+e \quad \cdots\cdots ⑤$$

が成り立つ。

ⅰ）　$n=3k$ のとき（k は自然数）⑤に代入すると，

$$\omega^{3k}-1=d\omega+e$$

$$0=d\omega+e$$

d,e は実数であり，ω は虚数なので，$d=e=0$

∴　求める余りは 0

ⅱ）　$n=3k+1$ のとき（k は 0 以上の整数）⑤に代入すると，

$$\omega^{3k+1}-1=d\omega+e$$

$$\omega-1=d\omega+e$$

d,e は実数であり，ω は虚数なので，$d=1,c=-1$

∴　求める余りは $x-1$

ⅲ）　$n=3k+2$ のとき（k は 0 以上の整数）⑤に代入すると，

$$\omega^{3k+2}-1=d\omega+e$$

$$\omega^2-1=d\omega+e$$

$$-\omega-2=d\omega+e$$

d,e は実数であり，ω は虚数なので，$d=-1,c=-2$

∴　求める余りは $-x-2$

(3)　$x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割ったときの商を $R(x)$，余りを $fx+g$ とおく。ただし，f,g は実数の定数とする。このとき，

$$x^{2024}-1=(x^2-x+1)R(x)+fx+g \quad \cdots\cdots ⑥$$

が成り立つ。

$x^2-x+1=0$ の虚数解を p とおくと，$p^2-p+1=0$ が成り立ち，両辺に $p+1$ をかけると，

$$(p+1)(p^2-p+1)=0$$

$$p^3+1=0$$

$$p^3=-1$$

$$\therefore\ p^6=1$$

⑥に $x=p$ を代入すると，

$$p^{2024}-1=(p^2-p+1)R(x)+fp+g$$

$$p^{6\times337+2}-1=fp+g$$

$$p^2-1=fp+g$$

$$p-2=fp+g \qquad (\because p^2=p-1)$$

f,g は実数であり，p は虚数なので，$f=1,g=-2$

∴　求める余りは $x-2$

$\boxed{2}$

(1)　表が 5 回，裏が 5 回出たときなので，求める確率は

$${}_{10}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{63}{256}$$

(2)　$x_5 \neq 1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率は，$x_{10}=0$ の確率から $x_5=1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率を引いたものである。

$x_5=1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率は

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{25}{256}$$

(1) より $x_{10}=0$ となる確率は $\frac{63}{256}$ であるから，求める確率は

$$\frac{63}{256}-\frac{25}{256}=\frac{19}{128}$$

(3)　$0\leqq x_n\leqq 3$ $(n=1, 2, \cdots\cdots, 9)$ かつ $x_{10}=0$ となる点P の移動を下図の様に表す。

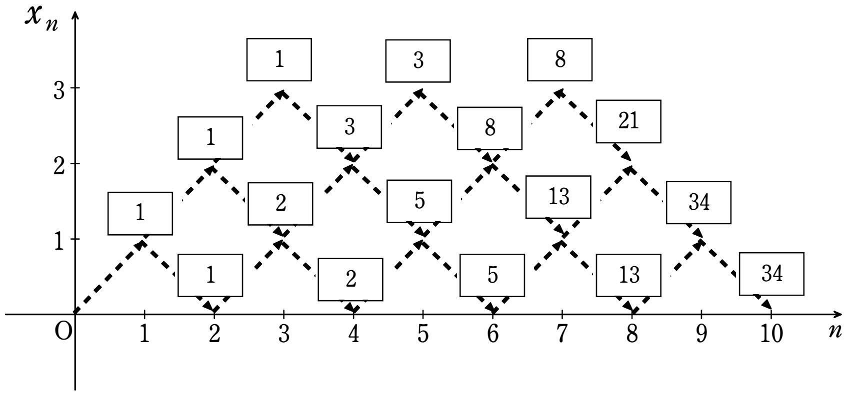
例えば，点 $(0, 0)$ から点 $(3, 1)$ までの点P の移動の仕方は次の2通りある。

ⅰ）　$(0, 0)\rightarrow(1, 1)\rightarrow(2, 0)\rightarrow(3, 1)$

ⅱ）　$(0, 0)\rightarrow(1, 1)\rightarrow(2, 2)\rightarrow(3, 1)$

このとき，この移動の仕方の総数である 2 を $\boxed{\ 2\ }$ として，$(3, 1)$ の近くに記入する。

他の点についても同様に記入していく。



したがって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\times 34=\frac{17}{512}$$

3

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma=\cos\gamma$ ，$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\beta=\cos\beta$ ，$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos\alpha=\cos\alpha$ である。

(1)　実数 s を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\vec{a}$ とおく。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=0$$
$$\vec{c}\cdot(\vec{c}-s\vec{a})=0$$
$$|\vec{c}|^2-s\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$
$$1-s\cos\alpha=0$$

$\cos\alpha\neq0$ より，

$$s=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$\therefore$　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{\cos\alpha}\vec{a}$　であるから，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{\cos\alpha}\vec{a}-\vec{c}$

実数 t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\vec{b}$ とおき，同様の計算を行うと，

$$t=\frac{1}{\cos\beta}\quad(\because\cos\beta\neq0)$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{\cos\beta}\vec{b}-\vec{c}$

(2)　$\angle\mathrm{DCE}=\theta$ だから，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}||\overrightarrow{\mathrm{CE}}|}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}&=\left(\frac{1}{\cos\alpha}\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos\beta}\vec{b}-\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{\cos\alpha}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{\cos\beta}\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2\\&=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}-1-1+1\\&=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2&=\left|\frac{1}{\cos\alpha}\vec{a}-\vec{c}\right|^2\\&=\frac{1}{\cos^2\alpha}|\vec{a}|^2-2\frac{1}{\cos\alpha}\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2\\&=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\\&=(1+\tan^2\alpha)-1\\&=\tan^2\alpha\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|>0$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=\tan\alpha$$

同様に計算すると，$|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|=\tan\beta$ となる。

したがって，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}||\overrightarrow{\mathrm{CE}}|}$

$$\begin{aligned}&=\frac{\dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}-1}{\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{\dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}-1}{\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\\&=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\end{aligned}$$

(3)　四面体OCDEの体積を V，$\triangle\mathrm{DOE}$ の面積を S_1 とすると，$\mathrm{CP}\perp$ (平面DOE) より

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_1\cdot\mathrm{CP}$$

となる。そこで，$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$ より，(2) の結果から

$$\cos\theta=\frac{\cos\gamma-\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}=0$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\triangle\mathrm{CDE}$ の面積を S_2 とすると，

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}||\overrightarrow{\mathrm{CE}}|\\&=\frac{1}{2}\tan\alpha\tan\beta\\&=\frac{1}{2}\tan\alpha\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\quad\left(\because\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\\&=\frac{1}{2}\tan\alpha\frac{1}{\tan\alpha}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

また，OC⊥CD，OC⊥CE であるからOC⊥ (平面CDE)

したがって，四面体OCDEの体積 V は，

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot S_2\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\\&=\frac{1}{6}\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

また，$\triangle\mathrm{DOE}$ の面積 S_1 は，

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}||\overrightarrow{\mathrm{OE}}|\sin\gamma\\&=\frac{\sin\gamma}{2\cos\alpha\cos\beta}\\&=\frac{\sin\gamma}{2\cos\gamma}\\&=\frac{1}{2}\tan\gamma\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot S_1\cdot\mathrm{CP}\\&=\frac{1}{6}(\tan\gamma)\mathrm{CP}\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

$0<\gamma<\pi$ から $\tan\gamma\neq0$ であり，①，②を用いると，

$$\mathrm{CP}=\frac{1}{\tan\gamma}$$

$\boxed{4}$

曲線 C : $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ について，$x\geqq 0$, $y\geqq 0$である。また，$\sqrt{y}=1-\sqrt{x}\geqq 0$ であるから，$0\leqq x\leqq 1$ である。同様に $\sqrt{x}=1-\sqrt{y}\geqq 0$ から，$0\leqq y\leqq 1$ である。

$\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$ として，両辺を 2 乗すると，

$$y=x-2\sqrt{x}+1 \quad (0\leqq x\leqq 1)$$

であるから，

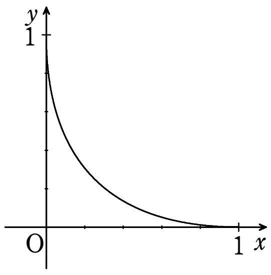
$$y'=1-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

したがって，増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1
y'		$-$	
y	1	↘	0

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}y'=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=-\infty$ ，$\displaystyle\lim_{x\to1-0}y'=\lim_{x\to1-0}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=0$

であるから，グラフの概形は次のようになる。



(1)　点P の座標を $(a\,,1-a)$ とおく。$(0\leqq a\leqq 1)$

直線 l の方程式は，

$$y-(1-a)=1\cdot(x-a)$$

$$y=x-2a+1$$

また，点 $(0\,,1)$ から点P との距離が t であることから，

$$t=\sqrt{(a-0)^2+(1-a-1)^2}=\sqrt{2}\,a$$

$$\therefore\quad a=\frac{1}{\sqrt{2}}t$$

したがって，直線 l の方程式を t を用表すと，

$$y=x-\frac{2}{\sqrt{2}}t+1=x-\sqrt{2}\,t+1$$

(2)　点 Q は直線 l と曲線 C の交点であるから，点Q の x 座標は，

$$x-\sqrt{2}\,t+1=x+2\sqrt{x}+1$$

$$2\sqrt{x}=-\sqrt{2}\,t$$

$$x=\frac{1}{2}t^2$$

点 P の x 座標が a つまり $\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ であり，点 P と点 Q の x 座標の差が，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}t-\dfrac{1}{2}t^2$ であるから，直線 l の傾きが 1 を考えると，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t-\frac{1}{2}t^2\right)$$
$$=t-\frac{1}{\sqrt{2}}t^2$$

(3)　求める体積を V とすると，

$$V=\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{PQ}^2\pi dt$$
$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}t^2\right)^2dt$$
$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}t^4-\sqrt{2}\,t^3+t^2\right)dt$$
$$=\pi\left[\frac{1}{10}t^5-\frac{\sqrt{2}}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{2}}$$
$$=\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}-\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{15}\pi$$