$\boxed{1}$

(1)　$x^{3m}-1$ を x^3-1 で割ったときの商を $P(x)$，余りを ax^2+bx+c とおくと，

$$x^{3m}-1=(x^3-1)P(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ。

$x^3-1=0$ の解のうち虚数解の 1 つを ω とすると，$\omega^3=1$ が成り立ち，

$$\omega^3-1=0$$

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

$$\omega^2+\omega+1=0 \qquad (\because \omega\fallingdotseq 1)$$

また，$(\omega^2)^3-1=(\omega^3)^2-1=0$ より，ω^2 は$x^3-1=0$ の解であるといえる。また，

$\omega^2\fallingdotseq\omega$ であるため，$x^3-1=0$ の解は 1 , ω , ω^2 である。

①に $x=1$ を代入すると，

$$0=a+b+c \quad \cdots\cdots②$$

①に $x=\omega$ を代入すると，

$$\omega^{3n}-1=a\omega^2+b\omega+c$$

$$1^n-1=a(-\omega-1)+b\omega+c \qquad (\because \omega^3=1\,,\ \omega^2=-\omega-1)$$

$$0=(-a+b)\omega-a+c \quad \cdots\cdots③$$

①に $x=\omega^2$ を代入すると，

$$\omega^{6n}-1=a\omega^4+b\omega^2+c$$

$$1-1=a\omega+b(-\omega-1)+c$$

$$0=(a-b)\omega-b+c \quad \cdots\cdots④$$

②，③，④より，

$$a=b=c=0$$

したがって，$x^{3m}-1$ を x^3-1 で割ったときの余りは 0 となり，題意は示された。

別解

$x^{3m}-1$ を因数分解すると，

$$x^{3m}-1=(x^3)^m-1=(x^3-1)\{(x^3)^{m-1}+(x^3)^{m-2}+\cdots\cdots\cdots+x^3+1\}$$

であるから，$x^{3m}-1$ を x^3-1 で割り切れることが示された。

(2)　x^n-1 を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $dx+e$ とおく。ただし，

d , e は実数の定数とする。このとき，

$$x^n-1=(x^2+x+1)Q(x)+dx+e$$

が成り立つ。

(1) より，ω は $x^2+x+1=0$ の解であるため，$x=\omega$ を代入すると，

$$\omega^n-1=d\omega+e \quad \cdots\cdots⑤$$

が成り立つ。

ｉ）　$n=3k$ のとき (k は自然数)　⑤に代入すると，

$$\omega^{3k}-1=d\omega+e$$

$$0=d\omega+e$$

d , e は実数であり，ω は虚数なので，$d=e=0$

∴　求める余りは 0

ⅱ）　$n=3k+1$ のとき (k は 0 以上の整数)　⑤に代入すると，

$$\omega^{3k+1}-1=d\omega+e$$

$$\omega-1=d\omega+e$$

d , e は実数であり，ω は虚数なので，$d=1$, $c=-1$

∴　求める余りは $x-1$

ⅲ）　$n=3k+2$ のとき (k は 0 以上の整数)　⑤に代入すると，

$$\omega^{3k+2}-1=d\omega+e$$

$$\omega^2-1=d\omega+e$$

$$-\omega-2=d\omega+e$$

d , e は実数であり，ω は虚数なので，$d=-1$, $c=-2$

∴　求める余りは $-x-2$

(3)　$x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割ったときの商を $R(x)$，余りを $fx+g$ とおく。ただし，

f , g は実数の定数とする。このとき，

$$x^{2024}-1=(x^2-x+1)R(x)+fx+g \quad \cdots\cdots⑥$$

が成り立つ。

$x^2-x+1=0$ の虚数解を p とおくと，$p^2-p+1=0$ が成り立ち，両辺に $p+1$ を

かけると，

$$(p+1)(p^2-p+1)=0$$

$$p^3+1=0$$

$$p^3=-1$$

$$\therefore\ p^6=1$$

⑥に $x=p$ を代入すると，

$$p^{2024}-1=(p^2-p+1)R(x)+fp+g$$

$$p^{6\times 337+2}-1=fp+g$$

$$p^2-1=fp+g$$

$$p-2=fp+g \qquad (\because\ p^2=p-1)$$

f , g は実数であり，p は虚数なので，$f=1$, $g=-2$

∴　求める余りは $x-2$

$\boxed{2}$

(1)　表が5回，裏が5回出たときなので，求める確率は

$${}_{10}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{63}{256}$$

(2)　$x_5 \fallingdotseq 1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率は，$x_{10}=0$ の確率から $x_5=1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率を引いたものである。

$x_5=1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率は

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{25}{256}$$

(1)より $x_{10}=0$ となる確率は $\frac{63}{256}$ であるから，求める確率は

$$\frac{63}{256}-\frac{25}{256}=\frac{19}{128}$$

(3)　$0\leqq x_n\leqq 2$ $(n=1,2,\cdots\cdots,9)$ かつ $x_{10}=0$ となる点Pの移動を下図の様に表す。

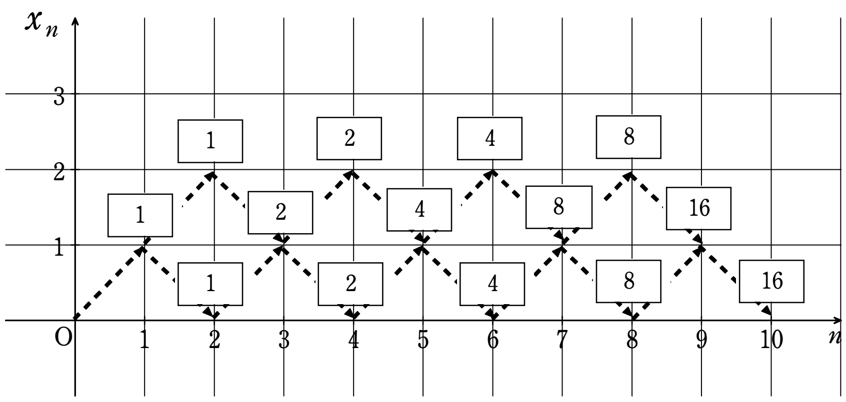
例えば，点$(0,0)$から点$(3,1)$までの点Pの移動の仕方は次の2通りある。

ⅰ）$(0,0)\to(1,1)\to(2,0)\to(3,1)$

ⅱ）$(0,0)\to(1,1)\to(2,2)\to(3,1)$

このとき，この移動の仕方の総数である2を $\boxed{2}$ として，$(3,1)$の近くに記入する。

他の点についても同様に記入していく。



したがって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\times 16=\frac{1}{64}$$

$\boxed{3}$

(1)　$\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$ であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}&=-\overrightarrow{AG}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AG})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AG})\\&=-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\\&=-3\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}\right)+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

したがって，題意は示された。

(2)

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=|\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GP}|^2+|\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GP}|^2+|\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GP}|^2\\&=|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2+3|\overrightarrow{GP}|^2-2(\overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{GC})\\&=|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2+3|\overrightarrow{GP}|^2-2\overrightarrow{GP}\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})\\&=|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2+3|\overrightarrow{PG}|^2\end{aligned}$$

したがって，題意は示された。

(3)　(2)より，

$$|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2-3|\overrightarrow{PG}|^2$$

点Pは任意の点だから，P＝Aとすると，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2&=|\overrightarrow{AA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-3|\overrightarrow{AG}|^2\\&=0+|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-3\left|\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}\right|^2\\&=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{3}(|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2)\\&=\frac{1}{3}(2|\overrightarrow{AB}|^2+2|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})\\&=\frac{1}{3}\{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+(|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2)\}\\&=\frac{1}{3}\{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2\}\\&=\frac{1}{3}\{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2\}\\&=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2}{3}\end{aligned}$$

したがって，題意は示された。

(4)　三角形ABCの外心をOとし，(2)においてP＝Oとすると，

$$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=3|\overrightarrow{OG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$$

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=R$ であるから

$$\begin{aligned}3R^2&=3|\overrightarrow{OG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2\\&=3|\overrightarrow{OG}|^2+\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2}{3}\quad(\because (2))\end{aligned}$$

$$R^2=|\overrightarrow{OG}|^2+\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2}{9}$$

$|\overrightarrow{OG}|^2\geqq 0$ であるから

$$R^2\geqq\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2}{9}$$

したがって，題意は示された。

$\boxed{4}$

(1)　$y=-x^2+1$ から $x^2=1-y$ を得る。$x^2+y^2=r^2$ に代入すると，

$$(1-y)+y^2=r^2$$

$$y^2-y+1-r^2=0$$

判別式を D とすると，

$$D=1-4(1-r^2)=4r^2-3=(2r-\sqrt{3})(2r+\sqrt{3})$$

共有点を持たないとき，$D<0$ であるから

$$(2r-\sqrt{3})(2r+\sqrt{3})<0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<r<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$r>0$ であるから，求める範囲は　$0<r<\frac{\sqrt{3}}{2}$

別解

$y=-x^2+1$ 上に点 P $(t,-t^2+1)$ をとる。ただし，$-1\leqq t\leqq 1$ とする。

このとき，原点Oとの距離は

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}&=\sqrt{t^2+(-t^2+1)^2}\\&=\sqrt{t^4-t^2+1}\\&=\sqrt{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

$0\leqq t^2\leqq 1$ であるから，OP の最小値は，$\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\left(t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

したがって，求める r の範囲は　$0<r<\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　接線 l の方程式は

$$r(\cos\theta)x+r(\sin\theta)y=r^2$$

$$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=r$$

$$\therefore\quad y=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{r}{\sin\theta}\qquad(\because \sin\theta\neq 0)$$

$y=-x^2+1$ に代入すると，

$$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{r}{\sin\theta}=-x^2+1$$

$$x^2-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{r}{\sin\theta}-1=0\quad\cdots\cdots①$$

$0<\theta<\pi$ より，①は異なる 2 つの実数解をもつため，その解を α，β $(\alpha<\beta)$ とおくと

解と係数の関係から，

$$\alpha+\beta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\quad,\quad\alpha\beta=\frac{r}{\sin\theta}-1$$

したがって，面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\left\{(-x^2+1)-\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{r}{\sin\theta}\right)\right\}dx\\&=\int_\alpha^\beta\{-(x-\alpha)(x-\beta)\}dx\\&=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\\&=\frac{1}{6}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}\\&=\frac{1}{6}\{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}\\&=\frac{1}{6}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-\frac{4r}{\sin\theta}+4\right)^{\frac{3}{2}}\\&=\frac{1}{6}\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}-\frac{4r}{\sin\theta}+4\right)^{\frac{3}{2}}\\&=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{4r}{\sin\theta}+3\right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$