第１問

問１

(1) 円運動の運動方程式より

$$\underline{m_{\mathrm{E}}\frac{v^2}{r}=\frac{GMm_{\mathrm{E}}}{r^2}}$$

(2) (1)より

$$v=\underline{\sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

(3) 求める力学的エネルギーは，運動エネルギーと万有引力による位置エネルギーの和なので

$$E=\frac{1}{2}m_{\mathrm{E}}v^2-\frac{GMm_{\mathrm{E}}}{r}=\underline{-\frac{GMm_{\mathrm{E}}}{2r}}$$

問２　無限遠における小惑星の速さは 0 とあるので，小惑星の無限遠と点 P における力学的エネルギー保存則より

$$0=\frac{1}{2}m_0{v_1}^2-\frac{GMm_0}{3R}\qquad\therefore\quad v_1=\underline{\sqrt{\frac{2GM}{3R}}}$$

問３　分裂後の破片の速度は v_2+v_1 であり，分裂後の小惑星の質量は m_0-m なので，運動量保存則より

$$m_0v_1=(m_0-m)v_2+m(v_2+v_1)\qquad\therefore\quad v_2=\underline{\frac{m_0-m}{m_0}v_1}$$

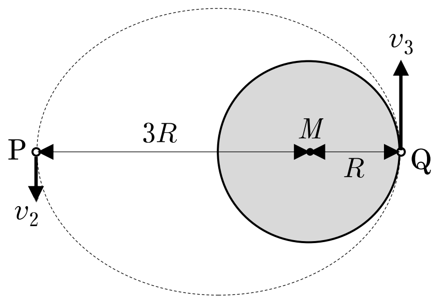
問４　分裂後の小惑星が太陽のまわりを半径 $3R$ で円運動をするときの速さを V とおくと，円運動の運動方程式より

$$(m_0-m)\frac{V^2}{3R}=\frac{GM(m_0-m)}{(3R)^2}\qquad\therefore\quad V=\sqrt{\frac{GM}{3R}}$$

$m=m_1$ のとき，$V=v_2$ となるので

$$\sqrt{\frac{GM}{3R}}=\frac{m_0-m_1}{m_0}\sqrt{\frac{2GM}{3R}}\qquad\therefore\quad m_1=\underline{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}m_0}$$

問５　直線 PO 上で，O に関して P と逆側の太陽の表面上の点を Q とする。点 P と Q を通る楕円運動となるときが，ぎりぎり太陽に衝突しないときである。



点 Q での小惑星の速さを v_3 とおくと，面積速度一定の法則より

$$3R\cdot v_2=R\cdot v_3\qquad\therefore\quad v_3=3v_2$$

点 P と点 Q で力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}(m_0-m_2){v_2}^2-\frac{GM(m_0-m_2)}{3R}=\frac{1}{2}(m_0-m_2){v_3}^2-\frac{GM(m_0-m_2)}{R}$$

この 2 式より v_3 を消去して

$$v_2=\sqrt{\frac{GM}{6R}}$$

問３より

$$\sqrt{\frac{GM}{6R}}=\frac{m_0-m_2}{m_0}\sqrt{\frac{2GM}{3R}}\qquad\therefore\quad m_2=\underline{\frac{1}{2}m_0}$$

問６　m_1 で半径 $3R$ の円運動，m_2 で点 O から $3R$ および R の楕円運動となるので

$0<m<m_1$ のとき　<u>(カ)</u>

$m_1<m<m_2$ のとき　<u>(ウ)</u>

$m_2<m$ のとき　<u>(キ)</u>

第２問

問１　スイッチを閉じた直後，コンデンサー C_1 は電荷が蓄えられておらず電圧が 0 である。よって，C_1を導線とみなして，抵抗値 R の抵抗１つと抵抗値 R の抵抗２つの並列つなぎとみなすことができる。このとき合成抵抗 R' は $R'=\frac{2}{3}R$ なので，求める電流を I とすると

$$I=\frac{E}{R'}=\underline{\frac{3E}{2R}}$$

問２　十分に時間が経つと，コンデンサー C_1 には電荷がたまり，抵抗 R_1 には電流が流れないので，求める電流 I' は

$$I'=\underline{\frac{E}{2R}}$$

問３　抵抗 R_2 と R_3 には電流 I' が流れる。V_X は抵抗 R_3 の電位差に等しいので

$$V_X=\underline{\frac{1}{2}E}$$

コンデンサー C_1 と C_2 が抵抗 R_3 と並列つなぎになる。**問２**のとき，C_1 には電圧 E がかかり，C_1 に蓄えられた電荷は CE である。よって，C_1 と C_2 に蓄えられた電荷をそれぞれ，Y 側を正として q_1，X 側を正として q_2 とおくと，電荷保存則より

$$-q_2+q_1=CE$$

またキルヒホッフの第 2 法則より

$$\frac{q_2}{C}+\frac{q_1}{C}=\frac{1}{2}E$$

よって

$$q_1=\frac{3}{4}CE \quad , \quad q_2=-\frac{1}{4}CE$$

V_Y はコンデンサー C_1 の電位差に等しいので

$$V_Y=\frac{\frac{3}{4}CE}{C}=\underline{\frac{3}{4}E}$$

問４　回路としては**問３**と同じであるが，２つのコンデンサーに電荷が溜まっていない状態からスイッチをつないだので，C_1 と C_2 は蓄えられた電荷が等しく，電圧も等しい。C_1 と C_2 で，R_3 と電圧が等しいので，C_1 と C_2 の電圧はともに $\frac{E}{4}$ である。求めるそれぞれの静電エネルギー U_1，U_2 は

$$U_1=U_2=\frac{1}{2}C\left(\frac{E}{4}\right)^2=\underline{\frac{1}{32}CE^2}$$

問５

［ア］コンデンサー C_1 と C_2 には同じ交流電流が流れているので，２つのコンデンサーの電位差は等しい。キルヒホッフの第 2 法則より

$$V_X=2V_Y$$

$V_X=L\omega I_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=L\omega I_0\cos\omega t$，$V_Y=-\frac{1}{C\omega}I_0\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{C\omega}I_0\cos\omega t$　なので

$$L\omega I_0\cos\omega t=\frac{2}{C\omega}I_0\cos\omega t$$

$$\therefore\quad L\omega=\frac{2}{C\omega}$$

したがって　　$\omega=\underline{\sqrt{\frac{2}{LC}}}$

［イ］**問４**の静電エネルギーの合計から

$$U_1+U_2=\underline{\frac{1}{16}CE^2}$$

［ウ］コイルを流れる電流の大きさの最大値が I_0 なので，求める磁気エネルギーの最大値は

$$\underline{\frac{1}{2}L{I_0}^2}$$

［エ］エネルギー保存則より，［イ］［ウ］より

$$\frac{1}{16}CE^2=\frac{1}{2}L{I_0}^2 \qquad \therefore \quad I_0=\underline{E\sqrt{\frac{C}{8L}}}$$

第３問

［ア］ピストンとの弾性衝突により，速度の x 成分が v_x から $-v_x$ になる。力積の大きさは，運動量の変化の大きさに等しいので

$$|m(-v_x)-mv_x|=\underline{2mv_x}$$

［イ］ピストンとの衝突間の時間 T は

$$T=\frac{2L}{v_x}$$

よって 1 秒間の衝突回数 c は

$$c=\frac{1}{T}=\underline{\frac{v_x}{2L}}$$

［ウ］分子 1 個が 1 秒間にピストンに与える力積の大きさは，［ア］［イ］より

$$2mv_x\times\frac{v_x}{2L}=\frac{m\,{v_x}^2}{L}$$

よって全ての分子での力積の大きさは，${v_x}^2$ を $\overline{{v_x}^2}$ として

$$\frac{m\,\overline{{v_x}^2}}{L}\times N=\underline{\frac{Nm\,\overline{{v_x}^2}}{L}}$$

［エ］［ウ］のピストンが 1 秒間に受ける力積は，ピストンが気体分子から受ける力に等しいので，圧力は

$$p=\frac{\dfrac{Nm\,\overline{{v_x}^2}}{L}}{S}=\underline{\frac{Nm\,\overline{v^2}}{3SL}} \quad \left(\because\ \overline{{v_x}^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}\right)$$

［オ］気体の状態方程式より，$pSL=\dfrac{N}{N_{\mathrm{A}}}RT$ が成り立つので，［エ］より

$$\frac{Nm\,\overline{v^2}}{3SL}SL=\frac{N}{N_{\mathrm{A}}}RT \qquad \therefore \quad \frac{1}{2}m\,\overline{v^2}\times N=\underline{\frac{3N}{2N_{\mathrm{A}}}RT}$$

［カ］ピストンとの衝突で速度の x 成分だけ変わる。衝突後の x 成分を ${v_x}'$ とおくと，反発係数の式より

$$-\frac{{v_x}'-(-u)}{v_x-(-u)}=1 \qquad \therefore \quad {v_x}'=-v_x-2u$$

したがって　$\vec{v'}=\underline{\left(-v_x-2u,\ v_y,\ v_z\right)}$

［キ］ピストンとの衝突で運動エネルギーも x 成分だけ変わる。分子 1 個の 1 回の衝突による運動エネルギーの増加量は

$$\frac{1}{2}m(-v_x-2u)^2-\frac{1}{2}m{v_x}^2$$
$$=\frac{1}{2}m{v_x}^2\left(1+\frac{2u}{v_x}\right)^2-\frac{1}{2}m{v_x}^2$$
$$\fallingdotseq\frac{1}{2}m{v_x}^2\left(1+\frac{2u}{v_x}\right)^2-\frac{1}{2}m{v_x}^2$$
$$=2m\,v_xu$$

よって $c\varDelta t$ 回の衝突での，運動エネルギーの増加量は

$$2mv_xu\times c\varDelta t=\underline{\frac{mv_x{}^2u}{L}\varDelta t}$$

［ク］分子全体での運動エネルギーの増加量は

$$\frac{m\overline{v_x{}^2}\,u}{L}\varDelta t\times N=\frac{Nm\overline{v^2}\,uS\varDelta t}{3SL}=\frac{Nm\overline{v}^2\varDelta V}{3SL}=\underline{p\varDelta V}\quad(\because\ uS\varDelta t=\varDelta V)$$

第４問

問１　観測者が点 P で静止しているときはドップラー効果が生じない。一方で，観測者が点 Q を通過するときは観測者が音源に近づいているので，ドップラー効果で振動数が大きくなる。　②　高くなる

問２　観測者の速度を，音源に向かう方向とそれと垂直な方向の 2 方向に分解する。

$$\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}v_0}$$

問３　ドップラー効果の公式より

$$\frac{V+\frac{1}{\sqrt{2}}v_0}{V}f=\underline{\frac{\sqrt{2}V+v_0}{\sqrt{2}V}f}$$

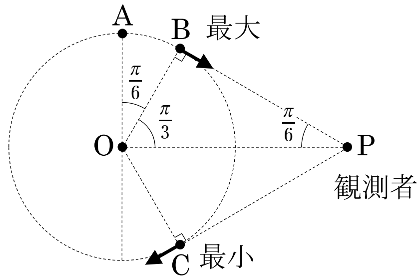
問４　観測者(点 O)と等速円運動する音源の距離が一定で，ドップラー効果は生じない。　①　変化しない

問５　音源が $\frac{1}{\sqrt{2}}v_{\mathrm{S}}$ で近づき，観測者が $\frac{1}{\sqrt{2}}v_0$ で遠ざかるときのドップラー効果なので

$$\frac{V-\frac{1}{\sqrt{2}}v_0}{V-\frac{1}{\sqrt{2}}v_{\mathrm{S}}}f=\underline{\frac{\sqrt{2}V-v_0}{\sqrt{2}V-v_{\mathrm{S}}}f}$$

問６　点 P から円に引いた 2 つの接線に関して，上の接点を B，下の接点を C とする。音源が B で発した音が最大の振動数として観測され，C で発した音が最小の振動数として観測される。

$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{6}$ なので，A を通過後 $\frac{T}{12}$ に最大の振動数を発して，そこから，$\frac{T}{3}$ 後に最小の振動数を発する。よってグラフは　（ウ）



問７　$f_{\max}=765$ Hz，$f_{\min}=680$ Hz で，ドップラー効果の公式より

$$f_{\max}=\frac{340}{340-v_{\mathrm{S}}}f=765$$

$$f_{\min}=\frac{340}{340+v_{\mathrm{S}}}f=680$$

この 2 式より

$$f=\underline{720\ \mathrm{Hz}}\quad,\quad v_{\mathrm{S}}=\underline{20\ \mathrm{m/s}}$$