[1]

起こりうるすべての場合の数は N^4 通り

(1) $X=Y=Z=W$ となる番号の選び方は N 通りであり，求める確率は

$$\frac{N}{N^4}=\underline{\frac{1}{N^3}}$$

(2) X, Y, Z, W の四つの番号の選び方は ${}_N C_4$ 通りであり，取り出される順番は $4!$ 通りであるので，求める確率は

$$\frac{{}_N C_4\cdot 4!}{N^4}=\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{N^4}$$
$$=\underline{\frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{N^3}}$$

(3) 3回取り出される番号と1回取り出される番号の選び方は $N(N-1)$ 通りであり，取り出される順番は $\frac{4!}{3!}$ 通りであるので，求める確率は

$$\frac{N(N-1)\cdot\frac{4!}{3!}}{N^4}=\underline{\frac{4(N-1)}{N^3}}$$

(4) X, Y, Z, W が三つの異なる番号からなるのは，X, Y, Z, W のうち二つが同じ番号で，残り二つがそれぞれ他と異なる番号となるときであり，番号の選び方は $N\cdot{}_{N-1}C_2$ 通りで取り出される順番は $\frac{4!}{2!}$ 通りであるので，求める確率は

$$\frac{N\cdot{}_{N-1}C_2\cdot\frac{4!}{2!}}{N^4}=\frac{6N(N-1)(N-2)}{N^4}$$
$$=\underline{\frac{6(N-1)(N-2)}{N^3}}$$

(別解)
余事象は (1),(2),(3) のとき または X, Y, Z, W のうち二つずつ同じ番号となることであり，番号の選び方は ${}_N C_2$ 通りであり，取り出される順番は $\frac{4!}{2!2!}$ 通りであるので，確率は

$$\frac{{}_N C_2\cdot\frac{4!}{2!2!}}{N^4}=\frac{3(N-1)}{N^3}$$

これと，(1),(2),(3) は互いに排反なので求める確率は

$$1-\left\{\frac{1+(N-1)(N-2)(N-3)+4(N-1)+3(N-1)}{N^3}\right\}$$
$$=1-\frac{N^3-6N^2+18N-12}{N^3}$$
$$=\underline{\frac{6(N-1)(N-2)}{N^3}}$$

[2] (1) $a_n = a + (n-1)\cdot d$

$a_3 = a + 2d = 18 \cdots ①$

$a_2 = a + d$ より

$S_2 = a + a + d = 18$

つまり　$2a + d = 18 \cdots ②$

①，② より　$a = 6,\ d = 6$ //

(2) (1) より　$a = 6,\ d = 6$ だから

$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$S_n = \frac{n}{2}\{2\cdot 6 + (n-1)\cdot 6\}$

$S_n = 3n(n+1)$ //

(3) (2) より　$S_k = 3k(k+1)$ だから

$T_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$

$= \sum_{k=1}^{n} 3k(k+1)$

$= \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + \sum_{k=1}^{n} 3k$

$= 3\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + 3\cdot\frac{n}{2}(n+1)$

$= \frac{n}{2}(n+1)\cdot\{(2n+1)+3\}$

$T_n = n(n+1)(n+2)$

また，$a_n = 6 + (n-1)\cdot 6 = 6n$ より

$U_n = T_n - 4S_n + 5a_n$

$= n(n+1)(n+2) - 4\cdot 3n(n+1) + 5\cdot 6n$

$= n\{(n+1)(n+2) - 12(n+1) + 30\}$

$U_n = n(n-4)(n-5)$

$U_{n+1} - U_n = (n+1)(n-3)(n-2) - n(n-4)(n-5)$

$= 3n^2 - 15n + 12$

$U_{n+1} - U_n = 3(n-1)(n-4)$

(i) $U_{n+1} < U_n$ のとき，

$1 < n < 4$　より　$n = 2, 3$

(ii) $U_{n+1} = U_n$ のとき

$n = 1, 4$

(iii) $U_{n+1} > U_n$ のとき

$n > 4$　より　$n = 5, 6, \cdots$

(i)～(iii) より

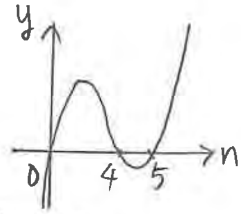
$U_1 = U_2 > U_3 > U_4 = U_5 < U_6 < \cdots$

よって，U_n が最小となるときの n の値は，

$n = 4, 5$ //

また，最小値は，$U_4 = U_5 = 0$ //

(別解)



$y = U_n$ のグラフを考える。

n^3 の係数が正で，n 軸との交点は，$n = 0, 4, 5$ なので

$$\begin{cases} 1 \leqq n \leqq 4,\ 5 \leqq n \text{ のとき}, & U_n \geqq 0 \\ 4 < n < 5 \text{ のとき}, & U_n < 0 \end{cases}$$

よって，自然数 n において，U_n が最小となるときの n の値は，$n = 4, 5$ //

また，最小値は，$U_4 = U_5 = 0$ //

(4) (3)より $U_k = k^3 - 9k^2 + 20k$ だから

$$V = \sum_{k=1}^{7}(k^3 - 9k^2 + 20k)$$

$$= \sum_{k=1}^{7} k^3 - \sum_{k=1}^{7} 9k^2 + \sum_{k=1}^{7} 20k$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\right)^2 - 9\cdot\frac{7}{6}\cdot 8\cdot 15 + 20\cdot\frac{7}{2}\cdot 8$$

$$V = 84$$

また，$\int_0^c (3x^2 + cx + 36)\,dx$

$$= \left[x^3 + \frac{c}{2}x^2 + 36x\right]_0^c$$

$$= \frac{3}{2}c^3 + 36c$$

これが，84 となるので

$$\frac{3}{2}c^3 + 36c = 84$$

$$c^3 + 24c - 56 = 0$$

$$(c-2)(c^2 + 2c + 28) = 0$$

cは，実数より $\underline{c = 2}$ //

(別解)

(3)より $U_n = n(n-4)(n-5)$ だから

$$V = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7$$

$$= 12 + 12 + 6 + 0 + 0 + 12 + 42$$

$$V = 84$$

[3]

(1) 四角形ABCDは正方形より

$\vec{b} \perp \vec{d}$ となるので，$\vec{b}\cdot\vec{d}=0$

△ABE，△ADEは正三角形より

$\vec{b}\cdot\vec{e}=\vec{d}\cdot\vec{e}$

$=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ$

$=\frac{1}{2}$

(2) 四角形AECFはひし形なので

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EA}$

$=-\vec{e}$

よって，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}$

$=\vec{b}+\vec{d}-\vec{e}$

$\vec{b},\vec{d},\vec{e}$は一次独立なので

$\overrightarrow{AF}=p\vec{b}+q\vec{d}+r\vec{e}$ とすると

$p=1,\ q=1,\ r=-1$

(3) 条件より

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}}{1+2}$$

$$=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{e}$$

$$\overrightarrow{AH}=(1-t)\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AF}$$

$$=(1-t)(\vec{b}+\vec{d})+t(\vec{b}+\vec{d}-\vec{e})$$

$$=\vec{b}+\vec{d}-t\vec{e}$$

ここで，

$$|\overrightarrow{AG}|^2=\frac{1}{9}(4|\vec{b}|^2+4\vec{b}\cdot\vec{e}+|\vec{e}|^2)$$

$$=\frac{1}{9}(4+2+1)$$

$$=\frac{7}{9}$$

$$|\overrightarrow{AH}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2+t^2|\vec{e}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{d}-2t\vec{d}\cdot\vec{e}-2t\vec{b}\cdot\vec{e}$$

$$=1+1+t^2+0-t-t$$

$$=t^2-2t+2$$

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}(2\vec{b}+\vec{e})\cdot(\vec{b}+\vec{d}-t\vec{e})$$

$$=\frac{1}{3}(2|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{d}-2t\vec{b}\cdot\vec{e}+\vec{b}\cdot\vec{e}+\vec{d}\cdot\vec{e}-t|\vec{e}|^2)$$

$$=\frac{1}{3}\left(2+0-t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-t\right)$$

$$=\frac{1}{3}(3-2t)$$

よって

$$\triangle AGH=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AG}|^2|\overrightarrow{AH}|^2-(\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{9}(t^2-2t+2)-\frac{1}{9}(3-2t)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{7(t^2-2t+2)-(9-12t+4t^2)}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{3t^2-2t+5}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}}$$

よって，$0<t<1$ において，

△AGHが最小となるのは

$t=\frac{1}{3}$ のときで，このとき

$$\triangle AGH=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{\frac{14}{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{42}}{18}$$

[4] (1) $C_1: y = ax^2 - 2ax$ より $y' = 2ax - 2a$

$x=2$ における接線の傾きは，

$y' = 2a$

これが，-2 より $2a = -2$

よって，$\underline{a = -1}$

(2) (1)より $a = -1$ だから

$f(x) = -x(x-2)$

$g(x) = b(x+c)^2$

とおくと，$y = f(x)$ は上に凸で，

$y = g(x)$ は，下に凸だから，C_1 と C_2 の共有点が1点のみであるとき，

$$\begin{cases} f(d) = g(d) \\ f'(d) = g'(d) \end{cases}$$

が成り立つ。$f'(x) = -2x + 2$

$g'(x) = 2b(x+c)$ だから

$$\begin{cases} -d^2 + 2d = b(d+c)^2 \cdots ① \\ -2d + 2 = 2b(d+c) \cdots ② \end{cases}$$

② より $-d + 1 = b(d+c) \cdots ③$

これを ① に代入すると

$-d^2 + 2d = (-d+1)(d+c)$

$-d^2 + 2d = -d^2 - cd + d + c$

$(c+1)d = c$

$c > 0$ より $c + 1 > 0$ だから

$$\underline{d = \frac{c}{c+1}}$$

また，$c > 0$ だから $d > 0$ なので

③ から $b = \dfrac{-d+1}{d+c}$

$$= \frac{-\frac{c}{c+1} + 1}{\frac{c}{c+1} + c}$$

$$= \frac{-c + c + 1}{c + c(c+1)}$$

$$\underline{b = \frac{1}{c^2 + 2c}}$$

(別解)

C_1 と C_2 の交点は

$-x(x-2) = b(x+c)^2$

$(b+1)x^2 + 2(bc-1)x + bc^2 = 0 \cdots ④$

$b > 0$ より $b + 1 > 0$ だから ④ は2次方程式となる。④ の判別式を D とすると，

$D/4 = (bc-1)^2 - (b+1) \cdot bc^2$

$= -(c^2 + 2c)b + 1$

C_1 と C_2 の共有点は，1点のみなので，

$D = 0$ となればよい。

よって $-(c^2+2c)b + 1 = 0$

$c > 0$ より $c^2 + 2c > 0$ だから

$$\underline{b = \frac{1}{c^2 + 2c}}$$

また，④の重解が d だから

$$d=\frac{-(a c-1)}{a+1}$$

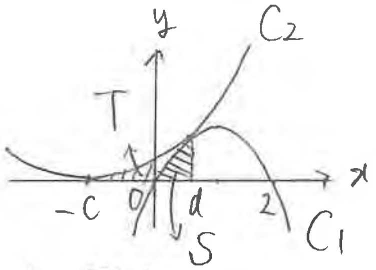
$$=\frac{-\frac{c}{c^2+2c}+1}{\frac{1}{c^2+2c}+1}$$

$$=\frac{-c+c^2+2c}{1+c^2+2c}$$

$$=\frac{c(c+1)}{(c+1)^2}$$

$$d=\frac{c}{c+1}$$

(3)



上の図より

$$S=\int_0^d(-x^2+2x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^d$$

$$=-\frac{1}{3}d^3+d^2$$

$$=\frac{1}{3}d^2(-d+3)$$

(2)より

$$S=\frac{1}{3}\left(\frac{c}{c+1}\right)^2\left(-\frac{c}{c+1}+3\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{c}{c+1}\right)^2\cdot\frac{2c+3}{c+1}$$

$$S=\frac{c^2(2c+3)}{3(c+1)^3}$$

(4) (3)の図より

$$T=\int_{-c}^0 a(x+c)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}(x+c)^3\right]_{-c}^0$$

$$=\frac{1}{3}a\cdot c^3$$

(2)より

$$T=\frac{c^3}{3}\cdot\frac{1}{c^2+2c}$$

$$T=\frac{c^2}{3(c+2)}$$

(5) (3)(4)より $8S=15T$ だから

$$8\cdot\frac{c^2(2c+3)}{3(c+1)^3}=15\cdot\frac{c^2}{3(c+2)}$$

$$8(2c+3)(c+2)=15(c+1)^3$$

$$15c^3+29c^2-11c-33=0$$

$$(c-1)(15c^2+44c+33)=0$$

cは正の実数より $c=1$