[1]

「数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学A，数学B」と同じ．

[2]

(1) 点Qは直線OAつまりx軸に関して，点$P(\alpha, \beta)$と対称より $Q(\alpha, -\beta)$

点Rは直線OBつまり$y=x$に関して点$P(\alpha, \beta)$と対称より $R(\beta, \alpha)$

(2) Pは直線OA上にも直線OB上にもない点なので，$\beta \neq 0$ かつ $\alpha \neq \beta$ …①

よって，

直線OA上に2点Q, Rがともに存在することはないので

直線OAと直線QRが交点をもつのは

OA $\not\parallel$ QR となればよい

①より直線QRの方程式は

$$y = \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}(x-\alpha)-\beta \quad \cdots ②$$

よって OA $\not\parallel$ QR となるのは

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \neq 0$$

$$\alpha+\beta \neq 0$$

また，このとき 交点Sは②より

$$0 = \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}(x-\alpha)-\beta$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}(x-\alpha) = \beta$$

$\alpha+\beta \neq 0$より $x-\alpha = \dfrac{\beta^2-\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

$$x = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}$$

よって $S\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}, 0\right)$

(3) (2)と同様に考えると

直線OBと直線QRが交点をもつのは

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \neq 1$$

$$\alpha+\beta \neq \beta-\alpha$$

よって $\alpha \neq 0$

また，このとき 交点Tは②より

$$x = \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}(x-\alpha)-\beta$$

$$(\beta-\alpha)x = (\alpha+\beta)(x-\alpha)-\beta(\beta-\alpha)$$

$$2\alpha x = \alpha^2+\beta^2$$

$\alpha \neq 0$より

$$x = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}$$

よって $T\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}, \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\right)$

(4) $\overrightarrow{OA}=(3,0)$

$\overrightarrow{OB}=(1,1)$

(2)，(3)より

$$\overrightarrow{BS}=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}-1,-1\right)$$

$$\overrightarrow{AT}=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}-3\quad\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\right)$$

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BS}$ となるのは

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BS}\neq\vec{0}$ より

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BS}=0$ となればよい。

よって $$3\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}-1\right)+0\cdot(-1)=0$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}=1$$

$$\alpha^2+\beta^2=\alpha+\beta\ \cdots③$$

$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AT}$ となるのは

$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AT}\neq\vec{0}$ より

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AT}=0$ となればよい

よって

$$1\cdot\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}-3\right)+1\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}=0$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}=3$$

$$\alpha^2+\beta^2=3\alpha\ \cdots④$$

③，④より

$$\alpha+\beta=3\alpha$$

$$\beta=2\alpha\ \cdots⑤$$

④へ代入すると

$$\alpha^2+4\alpha^2=3\alpha$$

$$5\alpha^2-3\alpha=0$$

$$\alpha(5\alpha-3)=0$$

$\alpha\neq0$ より $\alpha=\dfrac{3}{5}$ //

⑤より $\beta=\dfrac{6}{5}$ //

(別解) ③の立式

OA ⊥ BS となるのは

BS が x 軸に垂直となるので

2点 B，S の x 座標は等しい。

よって

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}=1$$

$$\alpha^2+\beta^2=\alpha+\beta\ \cdots③$$

[3]　(1), (2) は
「数学Ⅰ, 数学Ⅱ, 数学A, 数学B」と同じ.

(3) $\triangle AGH = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AG}|^2 \cdot |\overrightarrow{AH}|^2 - (\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH})^2}$ の証明

$\angle GAH = \theta$ とする.

$\triangle AGH$

$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AG}| \times |\overrightarrow{AH}| \sin\theta$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin\theta > 0$

よって

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ より

$$\triangle AGH = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AG}|\cdot|\overrightarrow{AH}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AG}|^2 \cdot |\overrightarrow{AH}|^2 - (|\overrightarrow{AG}|\cdot|\overrightarrow{AH}|\cdot\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AG}|^2 \cdot |\overrightarrow{AH}|^2 - (\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH})^2}$$

[4] (1) $a_1=2,\ a_{n+1}=\left(\dfrac{n^6(n+1)}{a_n{}^3}\right)^2$ より

$$a_2=\left(\frac{1\cdot 2}{2^3}\right)^2=\frac{1}{16}$$

よって，$b_1=\log_2\dfrac{a_1}{1}=\underline{1}$

$$b_2=\log_2\frac{a_2}{4}=\log_2\frac{1}{64}=\underline{-6}$$

(2) $b_{n+1}=\log_2\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)^2}$

$$=\log_2\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^{12}(n+1)^2}{a_n{}^6}$$

$$=\log_2\frac{n^{12}}{a_n{}^6}$$

$$=\log_2\left(\frac{a_n}{n^2}\right)^{-6}$$

$$=-6\cdot\log_2\frac{a_n}{n^2}$$

$$b_{n+1}=-6\cdot b_n$$

よって，$\{b_n\}$は，公比-6の等比数列である。

(3) $1\leqq k\leqq n$ より 底$2>1$の対数をとると，

$$0\leqq\log_2 k\leqq\log_2 n$$

したがって，

$$0\leqq\sum_{k=1}^n\log_2 k\leqq\sum_{k=1}^n\log_2 n$$

$$0\leqq\sum_{k=1}^n\log_2 k\leqq n\cdot\log_2 n$$

$6^{2n}>0$ より

$$0\leqq\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^n\log_2 k\leqq\frac{n\log_2 n}{6^{2n}}$$

条件より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\log_2 n}{6^{2n}}=0$ だから

はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^n\log_2 k=0$$

(4) (1)(2) より $b_n=(-6)^{n-1}$ だから

$$\log_2\frac{a_n}{n^2}=(-6)^{n-1}$$

$$\log_2 a_n-\log_2 n^2=(-6)^{n-1}$$

$$\log_2 a_n=(-6)^{n-1}+2\log_2 n$$

したがって，

$$\log_2 a_{2k}=(-6)^{2k-1}+2\log_2 2k$$

$$=(-6)^{2k-1}+2(1+\log_2 k)$$

$$=(-6)^{2k-1}+2+2\log_2 k$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^n\log_2 a_{2k}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^n\left\{(-6)^{2k-1}+2+2\log_2 k\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^n(-6)^{2k-1}+\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^n 2+\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^n 2\log_2 k\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{6^{2n}}\cdot\frac{-6(36^n-1)}{36-1}+\frac{2n}{6^{2n}}+\frac{2}{6^{2n}}\sum_{k=1}^n\log_2 k\right\}$$

ここで，(3)の結果と

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{6^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\log_2 n}{6^{2n}}\cdot\frac{2}{\log_2 n}=0$$

を用いると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-6}{35}\left(1-\frac{1}{36^n}\right)=\underline{-\frac{6}{35}}$

[5] (1) $f(x)=\log\dfrac{3x+3}{x^2+3}$

真数は正だから，$\dfrac{3x+3}{x^2+3}>0$

$x^2+3>0$ より $3x+3>0$

よって，$x>-1$ …①

$f(x)=\log(3x+3)-\log(x^2+3)$ より

$$f'(x)=\frac{3}{3x+3}-\frac{2x}{x^2+3}$$

$$=\frac{-3x^2-6x+9}{3(x+1)(x^2+3)}$$

$$=\frac{-(x-1)(x+3)}{(x+1)(x^2+3)}$$

$f'(x)=0$ となるのは，$x=1,-3$

①より $x=1$

よって，$f(x)$の増減表は，次のようになる。

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\log\frac{3}{2}$	$\searrow$

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\log\frac{3x+3}{x^2+3}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log\frac{\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}$$

$$=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}\log\frac{3x+3}{x^2+3}$$

$$=-\infty$$

$y=f(x)$ と x軸との交点は，

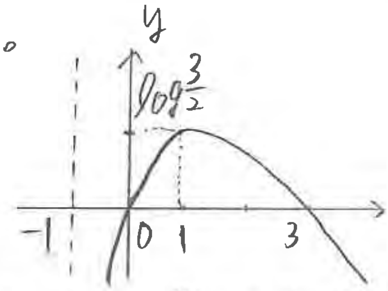
$$\frac{3x+3}{x^2+3}=1$$

$$3x+3=x^2+3$$

$$x(x-3)=0$$

$x=0,3$ （①を満たす）

よって，$y=f(x)$ のグラフは，次のようになる。



(2) $f(x)=s$ の異なる実数解の個数は，$y=f(x)$ と $y=s$ のグラフの交点の個数と等しいので，(1)より

$$\begin{cases} s>\log\frac{3}{2} \text{ のとき，} 0\text{個} \\ s=\log\frac{3}{2} \text{ のとき，} 1\text{個} \\ s<\log\frac{3}{2} \text{ のとき，} 2\text{個} \end{cases}$$

//

(3) $\displaystyle\int_0^3\frac{2x^2}{x^2+3}\,dx$

$$=\int_0^3\frac{2(x^2+3)-6}{x^2+3}\,dx$$

$$=\int_0^3\left(2-\frac{6}{x^2+3}\right)dx$$

$$=\int_0^3 2\,dx-\int_0^3\frac{6}{x^2+3}\,dx$$

ここで，$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと

$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$ より $dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0 \to 3$
θ	$0 \to \frac{\pi}{3}$

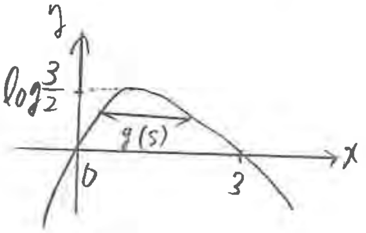
よって，$\left[2x\right]_0^3 - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{6}{3(\tan^2\theta+1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\, d\theta$

$= 6 - 2\sqrt{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta$

$= 6 - 2\sqrt{3}\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= 6 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ //

(4)



上図より

$$\int_0^{\alpha} g(s)\,ds = \int_0^3 f(x)\,dx$$

となる。

$\int_0^{\alpha} g(s)\,ds$

$= \int_0^3 \log \frac{3x+3}{x^2+3}\, dx$

$= \int_0^3 \left\{\log(3x+3) - \log(x^2+3)\right\} dx$

$= \left[(x+1)\cdot\log(3x+3)\right]_0^3 - \int_0^3 (x+1)\cdot\frac{3}{3x+3}\,dx$

$\quad - \left[x\log(x^2+3)\right]_0^3 + \int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3}\,dx$

$= 4\log 12 - \left[x\right]_0^3 - 3\log 12 + 6$

$\quad - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

$= 2\log 2 + 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ //