〔1〕

(1) ゲーム α の得点 x の平均値が7より

$$\frac{7+6+8+a+4}{5}=7$$

$$25+a=35$$

よって，$a=10$

(2) ゲーム β の得点 y の平均値が m より

$$\frac{0-4-1+2+b}{5}=m$$

よって，$b=5m+3$

したがって，

$$s_y{}^2=\frac{0^2+(-4)^2+(-1)^2+2^2+(5m+3)^2}{5}-m^2$$

$$=4m^2+6m+6$$

	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
A	7	0	0	$-m$	0
B	6	-4	-1	$-4-m$	$4+m$
C	8	-1	1	$-1-m$	$-1-m$
D	10	2	3	$2-m$	$6-3m$
E	4	$5m+3$	-3	$4m+3$	$-9-12m$
計					$-15m$

上の表より

$s_{xy}=\dfrac{-15m}{5}=-3m$ であり，

$z=py+q$ より，$s_z{}^2=p^2\cdot s_y{}^2$，$s_{xz}=p\cdot s_{xy}$ となるので

$s_z{}^2=p^2(4m^2+6m+6)$，$s_{xz}=-3mp$

(3) $s_x{}^2=\dfrac{0^2+(-1)^2+1^2+3^2+(-3)^2}{5}=4$，$s_x=2$，$s_z=|p|\sqrt{4m^2+6m+6}$

であるので，x と z の相関係数が $\dfrac{3}{4}$ より

$$\frac{s_{xz}}{s_x\cdot s_z}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{-3mp}{2|p|\sqrt{4m^2+6m+6}}=\frac{3}{4}$$

これを整理すると

$-2mp=|p|\sqrt{4m^2+6m+6}$ ……①

右辺は正なので，$-2mp>0$

つまり，$mp<0$ である。

① の両辺を2乗すると，

$$4m^2p^2=p^2(4m^2+6m+6)$$

$p^2>0$ だから両辺を p^2 で割ると，$m=-1$

このとき，$mp<0$ より，$p>0$

また，$b=5m+3$ より，$b=-2$

以上より，$m=-1$，$b=-2$，$p>0$

〔2〕

(1) $\vec{a}=(1,1,0)$，$\vec{b}=(0,1,1)$，$\vec{c}=(1,2,-1)$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot0+1\cdot1+0\cdot1=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=1\cdot1+1\cdot2+0\cdot(-1)=3$，

$\vec{b}\cdot\vec{c}=0\cdot1+1\cdot2+1\cdot(-1)=1$

(2) M は平面 α 上の点より，実数 s, t を用いると

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=s\vec{a}+t\vec{b}$

$=(s,\ s+t,\ t)$　と表せる。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$=(s-1,\ s+t-2,\ t+1)$

CM ⊥(平面 α)より，

$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CM}}\perp\vec{a}\\ \overrightarrow{\mathrm{CM}}\perp\vec{b}\end{cases}$ つまり $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\vec{a}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$

これらを整理すると，$\begin{cases}2s+t-3=0\\ s+2t-1=0\end{cases}$ である。

これを解くと，$s=\dfrac{5}{3}$，$t=-\dfrac{1}{3}$ となり

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

よって，$\mathrm{M}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

(3) D は直線 CM 上より，実数 k を用いると

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=k\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ と表せる。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\overrightarrow{\mathrm{CM}}$

$=\left(\dfrac{2}{3}k+1,\ -\dfrac{2}{3}k+2,\ \dfrac{2}{3}k-1\right)$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left(\dfrac{2}{3}k,\ -\dfrac{2}{3}k+1,\ \dfrac{2}{3}k-1\right)$ であり，

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ より，両辺を2乗すると

$$2=\frac{4}{3}k^2-\frac{8}{3}k+2$$

これを解くと，$k=0,2$

点 D は点 C と異なる点なので，$k=2$ となり

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

よって，$\mathrm{D}\left(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-\dfrac{2}{3}$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\cdot|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot2-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

〔3〕

（1）直線 P_nQ_n の方程式は

$$\frac{x}{an}+\frac{y}{bn}=1 \text{ より，} bx+ay=abn$$

これを満たす格子点 (x, y) を考えると

$$bx=a(bn-y)$$

a，b は互いに素であることから，x は a の倍数であり，

整数 k を用いると，$x=ak$ と表せる。

このとき，$y=b(n-k)$ となる。

ここで，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ を満たすのは，$0\leqq k\leqq n$ のときである。

（2）$P(a, 0)$，$Q(0, b)$，$R(a, b)$ より，長方形 OPRQ 上の格子点 (x, y) は，

$0\leqq a\leqq n$，$0\leqq b\leqq n$ より

$$(a+1)(b+1) \text{（個）}$$

線分 PQ 上の格子点は，2点 P，Qのみなので，三角形 OPQ 上の格子点は，

$$\frac{(a+1)(b+1)-2}{2}+2=\frac{1}{2}(ab+a+b+3) \text{（個）}$$

（3）線分 P_nQ_n 上の格子点は，（1）より，$k=0, 1, \cdots, n$ の $n+1$ 個あるので

（2）と同様に考えると三角形 OP_nQ_n 上の格子点は，

$$\frac{(an+1)(bn+1)-(n+1)}{2}+n+1=\frac{1}{2}\{abn^2+(a+b+1)n+2\} \text{（個）}$$

（4）四面体 OXYZ の平面 $z=k$ ($k=0, 1, \cdots, n-1$) 上の切り口は，

3点 $(0, 0, 0)$，$(a(n-k), 0, 0)$，$(0, b(n-k), 0)$ を頂点とする三角形となり，

この三角形上の格子点は，$n-k=m$ とすると（3）より

$$\frac{1}{2}\{abm^2+(a+b+1)m+2\} \text{（個）}$$

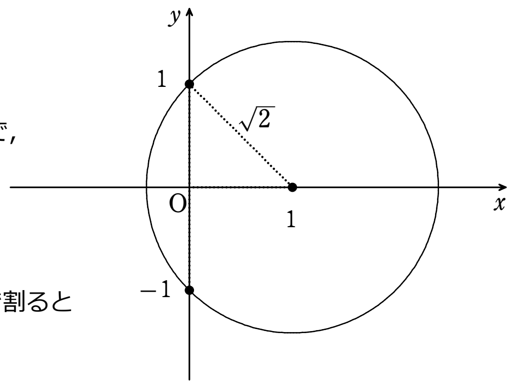
また，平面 $z=n$ 上の格子点は，点 Z のみであることから，四面体 OXYZ 上の格子点は，

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2}\{abm^2+(a+b+1)m+2\}+1$$

$$=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}(a+b+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}\cdot 2n+1$$

$$=\frac{n+1}{12}\{2abn^2+(ab+3a+3b+3)n+12\} \text{（個）}$$

〔4〕



（1）$C:|z-1|=\sqrt{2}$ ……①

点 α は円 C と虚軸との交点なので，

図から，$\alpha=\pm i$

このとき，$\alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha^2+1}{\alpha}=0$

（2）$z\fallingdotseq 0$ より，①の両辺を $|z|$ で割ると

$$\frac{|z-1|}{|z|}=\frac{\sqrt{2}}{|z|}$$

$$\left|1-\frac{1}{z}\right|=\frac{\sqrt{2}}{|z|}$$

両辺を2乗すると

$$\left(1-\frac{1}{z}\right)\overline{\left(1-\frac{1}{z}\right)}=\frac{2}{z\bar{z}}$$

これを整理すると

$$\frac{1}{z\bar{z}}+\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}-1=0$$

$$\left(\frac{1}{z}+1\right)\overline{\left(\frac{1}{z}+1\right)}=2$$

$$\left|\frac{1}{z}+1\right|^2=2$$

よって，$\left|\frac{1}{z}+1\right|=\sqrt{2}$　つまり $\left|-\frac{1}{z}-1\right|=\sqrt{2}$ となり，点 $-\frac{1}{z}$ も円 C 上にあるといえる。

（3）$w=z+\frac{1}{z}$ より，

$$|w-2|=\left|z+\frac{1}{z}-2\right|$$

$$=\left|\frac{z^2-2z+1}{z}\right|$$

$$=\frac{|z-1|^2}{|z|}$$

よって，①より　$|w-2|=\frac{2}{|z|}$

（4）$|w+2|=\left|z+\frac{1}{z}+2\right|$

$$=\left|z\left(\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z}+1\right)\right|$$

$$=|z|\cdot\left|\frac{1}{z}+1\right|^2$$

（2）より，$|w+2|=2|z|$

また，（3）より，$|w-2|=\frac{2}{|z|}$ なので

$$|w-2||w+2|=\frac{2}{|z|}\cdot 2|z|=4$$

〔5〕

(1)　$f(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ より，

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$x>0$のとき，$f''(x)<0$ となるので，曲線 $y=f(x)$ は $x>0$ で上に凸である。

(2)　$g(x)=f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1\cdot\sqrt{1+x^2}-x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\geqq 0$$

よって，$g(x)$ は単調に増加し，$g(0)=0$ より　$g(x)\geqq 0$

したがって，$x\geqq 0$ において　$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\leqq f(x)$

$h(x)=x-f(x)$ とおくと

$$h'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\sqrt{1+x^2}\geqq 1$ より，$h'(x)\geqq 0$

よって，$h(x)$ は単調に増加し，$h(0)=0$ より　$h(x)\geqq 0$

したがって，$x\geqq 0$ において　$f(x)\leqq x$

以上より $x\geqq 0$ のとき，$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\leqq f(x)\leqq x$

(3)　$S=\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

$$=\Big[x\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big]_0^{\frac{3}{4}}-\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$
$$=\Big[x\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big]_0^{\frac{3}{4}}-\Big[\sqrt{1+x^2}\Big]_0^{\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{3}{4}\log 2-\frac{1}{4}$$

(4)　$f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\log 2$，$f'(x)=\dfrac{4}{5}$ より接線 ℓ の方程式は，

$$y=\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}+\log 2$$

であり，ℓ と $y=x$ の交点Bは，B$(5\log 2-3,\ 5\log 2-3)$

よって，$T=\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{ABC}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(5\log 2-3)+\frac{1}{2}\cdot\log 2\cdot\left(\frac{3}{4}-5\log 2+3\right)$$
$$=-\frac{5}{2}(\log 2)^2+\frac{15}{4}\log 2-\frac{9}{8}$$

(5)　(2) より，$0\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}$ において，$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\leqq f(x)$ が成り立つ。

等号は常に成り立たないから，

$$\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx<\int_0^{\frac{3}{4}}f(x)dx$$

よって，$\dfrac{1}{4}<\dfrac{3}{4}\log 2-\dfrac{1}{4}$

$$\frac{2}{3}<\log 2\ \cdots\cdots ①$$

(4)より，$S<T$ となるので

$$\frac{3}{4}\log 2-\frac{1}{4}<-\frac{5}{2}(\log 2)^2+\frac{15}{4}\log 2-\frac{9}{8}$$

$\log 2=a$ として整理すると，

$$20a^2-24a+7<0$$
$$(10a-7)(2a-1)<0$$
$$\frac{1}{2}<a<\frac{7}{10}$$

つまり，$\dfrac{1}{2}<\log 2<\dfrac{7}{10}\ \cdots\cdots ②$

①，②より，$\dfrac{2}{3}<\log 2<\dfrac{7}{10}$

よって，$\log 2$ の小数第1位の数字は　6