〔1〕

(1) ゲーム α の得点 x の平均値が 7 より

$$\frac{7+6+8+a+4}{5}=7$$

$$25+a=35$$

よって，$a=10$

(2) ゲーム β の得点 y の平均値が m より

$$\frac{0-4-1+2+b}{5}=m$$

よって，$b=5m+3$

したがって，

$$s_y{}^2=\frac{0^2+(-4)^2+(-1)^2+2^2+(5m+3)^2}{5}-m^2$$

$$=4m^2+6m+6$$

	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
A	7	0	0	$-m$	0
B	6	-4	-1	$-4-m$	$4+m$
C	8	-1	1	$-1-m$	$-1-m$
D	10	2	3	$2-m$	$6-3m$
E	4	$5m+3$	-3	$4m+3$	$-9-12m$
計					$-15m$

上の表より

$s_{xy}=\dfrac{-15m}{5}=-3m$ であり，

$z=py+q$ より，$s_z{}^2=p^2\cdot s_y{}^2$，$s_{xz}=p\cdot s_{xy}$ となるので

$s_z{}^2=p^2(4m^2+6m+6)$，$s_{xz}=-3mp$

(3) $s_x{}^2=\dfrac{0^2+(-1)^2+1^2+3^2+(-3)^2}{5}=4$，$s_x=2$，$s_z=|p|\sqrt{4m^2+6m+6}$

であるので，x と z の相関係数が $\dfrac{3}{4}$ より

$$\frac{s_{xz}}{s_x\cdot s_z}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{-3mp}{2|p|\sqrt{4m^2+6m+6}}=\frac{3}{4}$$

これを整理すると

$-2mp=|p|\sqrt{4m^2+6m+6}$ ……①

右辺は正なので，$-2mp>0$

つまり，$mp<0$ である。

① の両辺を2乗すると，

$$4m^2p^2=p^2(4m^2+6m+6)$$

$p^2>0$ だから両辺を p^2 で割ると，$m=-1$

このとき，$mp<0$ より，$p>0$

また，$b=5m+3$ より，$b=-2$

以上より，$m=-1$，$b=-2$，$p>0$

〔2〕

(1) $f(0)=\displaystyle\int_a^b x^2dx$

$=\left[\dfrac{1}{3}x^3\right]_a^b$

$=\dfrac{1}{3}(b^3-a^3)$

(2) $f(1)=\displaystyle\int_a^b (x-a)(x-b)dx$

$=-\dfrac{1}{6}(b-a)^3$

よって，$14f(1)+f(0)=0$ のとき

$$-\frac{7}{3}(b-a)^3+\frac{1}{3}(b^3-a^3)=0$$

$$7(b-a)^3-(b-a)(b^2+ab+a^2)=0$$

$$(b-a)(6b^2-15ab+6a^2)=0$$

$a\fallingdotseq b$ より

$$6b^2-15ab+6a^2=0$$

$$2b^2-5ab+2a^2=0$$

$a\fallingdotseq 0$ より

$$2\left(\frac{b}{a}\right)^2-5\cdot\frac{b}{a}+2=0$$

$$\frac{b}{a}=2,\ \frac{1}{2}$$

ここで，$0<a<b$ より，$\dfrac{b}{a}>1$

よって，$\dfrac{b}{a}=2$

(3) $14f(1)+f(0)=0$ のとき (2) より，$b=2a$

よって，$f(t)=\displaystyle\int_a^{2a}(x-at)(x-2at)dx$

$=\displaystyle\int_a^{2a}\{2a^2t^2-3atx+x^2\}dx$

$=\left[2a^2t^2x-\dfrac{3}{2}atx^2+\dfrac{1}{3}x^3\right]_a^{2a}$

$=2a^3t^2-\dfrac{9}{2}a^3t+\dfrac{7}{3}a^3$

また，$f(0)=\dfrac{7}{3}a^3$ より

$y=f(t)-f(0)$

$=2a^3t^2-\dfrac{9}{2}a^3t$

$=2a^3\left(t-\dfrac{9}{8}\right)^2-\dfrac{81}{32}a^3$

$a>0$ より，y の最小値は，$-\dfrac{81}{32}a^3$

よって，$-\dfrac{81}{32}a^3=-6$

$$a^3=\frac{64}{27}$$

a は実数より，$a=\dfrac{4}{3}$

〔3〕

(1) $\vec{a}=(1,1,0)$，$\vec{b}=(0,1,1)$，$\vec{c}=(1,2,-1)$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot0+1\cdot1+0\cdot1=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=1\cdot1+1\cdot2+0\cdot(-1)=3$，

$\vec{b}\cdot\vec{c}=0\cdot1+1\cdot2+1\cdot(-1)=1$

(2) M は平面 α 上の点より，実数 s，t を用いると

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=s\vec{a}+t\vec{b}$

$=(s,\ s+t,\ t)$　と表せる。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$=(s-1,\ s+t-2,\ t+1)$

CM ⊥(平面 α)より，

$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CM}}\perp\vec{a}\\ \overrightarrow{\mathrm{CM}}\perp\vec{b}\end{cases}$　つまり　$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\vec{a}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$

これらを整理すると，$\begin{cases}2s+t-3=0\\ s+2t-1=0\end{cases}$である。

これを解くと，$s=\dfrac{5}{3}$，$t=-\dfrac{1}{3}$ となり

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

よって，$\mathrm{M}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

(3) D は直線 CM 上より，実数 k を用いると

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=k\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ と表せる。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\overrightarrow{\mathrm{CM}}$

$=\left(\dfrac{2}{3}k+1,\ -\dfrac{2}{3}k+2,\ \dfrac{2}{3}k-1\right)$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left(\dfrac{2}{3}k,\ -\dfrac{2}{3}k+1,\ \dfrac{2}{3}k-1\right)$であり，

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ より，両辺を2乗すると

$2=\dfrac{4}{3}k^2-\dfrac{8}{3}k+2$

これを解くと，$k=0,2$

点 D は点 C と異なる点なので，$k=2$ となり

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

よって，$\mathrm{D}\left(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-\dfrac{2}{3}$であるから

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\cdot|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\cdot2-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

〔4〕

(1) $a=r$ のとき，円 C の方程式は $x^2+(y-r)^2=r^2$ であり，

このとき $y=x^2$ との交点を考えると

$y+(y-r)^2=r^2$

$y(y-2r+1)=0$

よって，$y=0,\ 2r-1$

ここで，$y=x^2$ より $y\geqq0$ となるので，共有点が一つのみになるのは，$2r-1\leqq0$

$r>0$ より，$0<r\leqq\dfrac{1}{2}$

(2) 円 C が不等式 $y>0$ の表す領域に含まれるための必要十分条件は，円の中心の y 座標が，正でかつ円の半径より大きいことである。つまり $a>r$ である。

(3) 円 C の方程式は $x^2+(y-a)^2=r^2$ であり，

このとき $y=x^2$ との交点を考えると

$y+(y-a)^2=r^2$

$y^2-(2a-1)y+a^2-r^2=0$ ……①

共有点がちょうど二つになるのは，次の 2 通りのときである。

（Ⅰ）① が正の重解をもつ。

（Ⅱ）① が正の解と負の解を 1 つずつもつ。

$f(y)=y^2-(2a-1)y+a^2-r^2$とすると　$f(y)=\left(y-\dfrac{2a-1}{2}\right)^2+a-\dfrac{1}{4}-r^2$

（Ⅰ）となるのは，$\begin{cases}\dfrac{2a-1}{2}>0\\ a-\dfrac{1}{4}-r^2=0\end{cases}$ となればよい。

つまり，$\begin{cases}a>\dfrac{1}{2}\\ a=r^2+\dfrac{1}{4}\end{cases}$ ……②

（Ⅱ）となるのは，$f(0)<0$ となればよい。

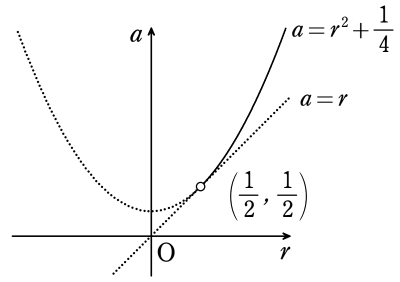
つまり，$a^2-r^2<0$

$(a-r)(a+r)<0$

$-r<a<r$　これは (2) より $a>r$ なので不適。

よって，求める $(r,\ a)$ の範囲は，

右図の実線部分である。



(4) (2)，(3) より (i) を満たすのは $\begin{cases}a>\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots③\\ a=r^2+\dfrac{1}{4} & \cdots\cdots④\\ a>r\end{cases}$ のときである。

また，$a+r+s>s$ より，円 C' は不等式 $y>0$ の表す領域に含まれる。

よって，(ii) を満たすのは③，④において，a を $a+r+s$ に，r を s におきかえればよいので，

$\begin{cases}a+r+s>\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots⑤\\ a+r+s=s^2+\dfrac{1}{4} & \cdots\cdots⑥\end{cases}$

④，⑥より

$r^2+\dfrac{1}{4}+r+s=s^2+\dfrac{1}{4}$

$s^2-s-r(r+1)=0$

$(s+r)(s-r-1)=0$

$s=-r,\ r+1$

s，r はともに正より，$s=r+1$